

D. V. Alexandrov, P. K. Galenko, Analytical solution of the problem on inclined viscous flow around a parabolic dendrite within the framework of Oseen's approximation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, Volume 26, Issue 3, 379–387

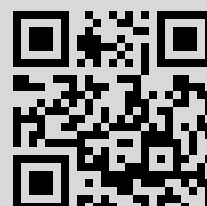
DOI: <https://doi.org/10.20537/vm160307>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 213.142.35.54

July 20, 2019, 10:54:52



УДК 532.51

© Д. В. Александров, П. К. Галенко

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДЕНДРИТА НАКЛОННЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОСЕЕНА<sup>1</sup>**

Сформулирована математическая модель обтекания дендрита наклонным потоком вязкой жидкости в гидродинамическом приближении Осеена. Построено аналитическое решение задачи об обтекании параболического дендрита наклонным потоком жидкости в двумерном и трехмерном случаях. В лабораторной системе координат определены компоненты скорости жидкости вблизи вершины дендрита в двумерной и трехмерной геометриях течения с использованием криволинейных координат параболического цилиндра и параболоида вращения. Аналитические решения гидродинамических уравнений Осеена переписаны в системе координат растущего с постоянной скоростью дендрита. В предельном случае нулевого угла между направлением скорости жидкости вдали от дендрита и его осью найденное решение переходит в ранее известное. Проиллюстрирована зависимость приведенной компоненты скорости жидкости от параболических координат при различных коэффициентах наклона течения.

*Ключевые слова:* дендриты, конвекция, вязкая жидкость, уравнения Осеена.

DOI: [10.20537/vm160307](https://doi.org/10.20537/vm160307)

Из экспериментов известно, что дендритный рост часто наблюдается в условиях набегающего потока расплава или раствора вследствие действия гравитационных сил или механизма вынужденной конвекции (например, в электромагнитных левитаторах) [1–3]. Во многих ситуациях такой поток наклонен под некоторым углом к оси роста дендрита. Наклонное течение может сильно изменять характеристики роста дендритов по сравнению со случаями дендритного роста без конвекции или когда поток расплава направлен по оси роста кристалла.

Вследствие нарушения симметрии роста при наклонном обтекании дендритного кристалла будут изменяться такие важные характеристики, как критерий отбора устойчивой скорости роста вершины дендрита или параметры роста его боковых ветвей. Для детального изучения этих вопросов сначала требуется решить гидродинамическую задачу об обтекании растущего дендрита наклонным потоком вязкой жидкости. В 1910 году Карл Вильгельм Осеен (Carl Wilhelm Oseen) предложил метод решения гидродинамических задач о течениях вязкой жидкости на основе линеаризованных уравнений Навье–Стокса [4], называемых теперь уравнениями Осеена. В настоящей статье этот метод применяется для расширения теории работы [5] на случай наклонного обтекания дендрита вязкой жидкостью.

**§ 1. Криволинейные координаты**

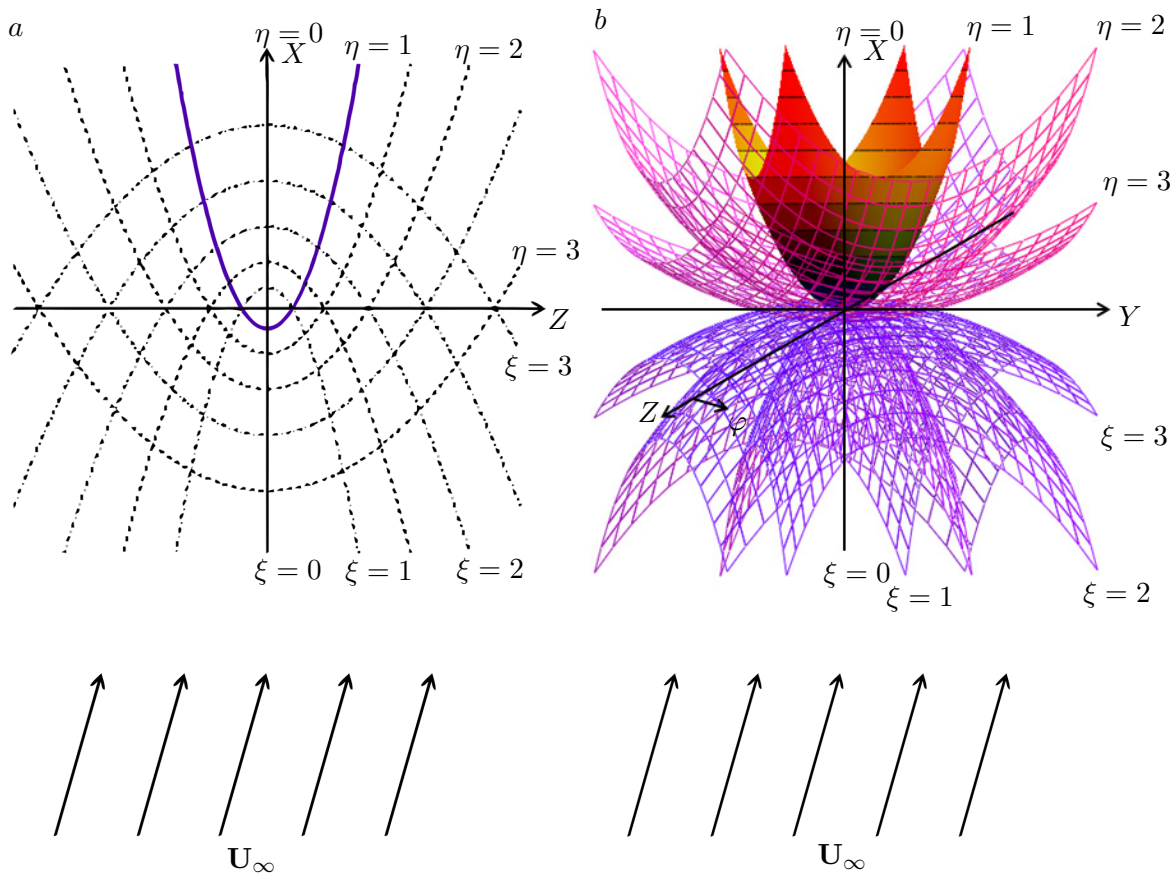
Для описания обтекания дендрита наклонным потоком вязкой жидкости (рисунок 1) рассмотрим криволинейные координаты параболического цилиндра и параболоида вращения.

Координаты параболического цилиндра  $\xi$  и  $\eta$  (рисунок 1, а) связаны с декартовыми координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  следующими соотношениями:

$$\frac{x}{R} = X = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \quad \frac{y}{R} = Y = Y, \quad \frac{z}{R} = Z = \xi\eta, \quad (1.1)$$

где  $R$  — диаметр вершины дендрита. В координатах (1.1) поверхность параболического дендрита задается уравнением  $\eta = 1$ , а жидкость занимает область  $0 \leq \xi < \infty$  и  $1 < \eta < \infty$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 16–11–10095).



**Рис. 1.** Обтекание наклонным потоком вязкой жидкости параболического цилиндра (а) и параболоида вращения (б). Поверхность дендрита задается уравнением  $\eta = 1$ .

Соотношения между единичными векторами  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$  декартовой системы координат и  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$  системы координат параболического цилиндра имеют вид

$$\mathbf{e}_x = \frac{\xi \mathbf{e}_\xi - \eta \mathbf{e}_\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\eta \mathbf{e}_\xi + \xi \mathbf{e}_\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \quad (1.2)$$

Коэффициенты Ламе записываются следующим образом:

$$h_\xi = h_\eta = R\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_y = R. \quad (1.3)$$

Используя соотношения (1.2) и (1.3), находим связь между пространственными производными

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (1.4)$$

Координаты параболоида вращения  $\xi, \eta$  и  $\varphi$  (рисунок 1, б) связаны с декартовыми координатами  $x, y$  и  $z$  следующим образом:

$$\frac{x}{R} = X = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \quad \frac{y}{R} = Y = \xi\eta \sin \varphi, \quad \frac{z}{R} = Z = \xi\eta \cos \varphi. \quad (1.5)$$

В координатах (1.5) параболоидальная поверхность дендрита задается уравнением  $\eta = 1$ , а жидкость занимает область  $0 \leq \xi < \infty, 1 < \eta < \infty$  и  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Единичные вектора  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  декартовой системы координат связаны с единичными векторами  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  системы координат параболоида вращения соотношениями

$$\mathbf{e}_x = \frac{\xi \mathbf{e}_\xi - \eta \mathbf{e}_\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \mathbf{e}_y = \frac{\eta \sin \varphi \mathbf{e}_\xi + \xi \sin \varphi \mathbf{e}_\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} - \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\eta \cos \varphi \mathbf{e}_\xi + \xi \cos \varphi \mathbf{e}_\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.6)$$

Коэффициенты Ламе записываются в следующем виде:

$$h_\xi = h_\eta = R\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_\varphi = R\xi\eta. \quad (1.7)$$

На основе выражений (1.6) и (1.7), находим связь между пространственными производными

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\eta \sin \varphi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\xi \sin \varphi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\cos \varphi}{\xi\eta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\eta \cos \varphi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\xi \cos \varphi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\sin \varphi}{\xi\eta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.9)$$

## § 2. Гидродинамическая модель Осеена обтекания дендрита наклонным потоком вязкой жидкости

Общий метод решения гидродинамических уравнений вязкой жидкости в приближении Осеена изложен, например, в работах [6–8]. Для решения поставленной задачи будем использовать теорию работы [5], посвященную отысканию решений уравнений Осеена для ситуации осесимметричного обтекания параболического и параболоидального дендритов (когда поток жидкости вдали от дендрита направлен вдоль оси  $X$ ).

Считая жидкость несжимаемой, запишем гидродинамические уравнения Осеена и уравнение непрерывности в виде

$$\mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  — вектор скорости жидкости с компонентами  $u, v, w$  на координатные оси  $x, y, z$ ,  $\mathbf{U}_\infty = (U_{\infty x}, U_{\infty y}, U_{\infty z})$  — вектор заданной скорости жидкости вдали от дендрита с компонентами  $U_{\infty x}, U_{\infty y}, U_{\infty z}$  на соответствующие оси декартовой системы координат,  $\rho$  — плотность жидкости,  $p$  — давление в жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости. В случае двумерного обтекания первое уравнение (2.1) имеет проекции только на оси  $x$  и  $z$ .

Граничные условия на скорость жидкости к модели (2.1) записываются следующим образом:

$$u = v = w = 0, \quad \eta = 1; \quad u \rightarrow U_{\infty x}, \quad v \rightarrow U_{\infty y}, \quad w \rightarrow U_{\infty z}, \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Вводя новые переменные

$$u' = u - U_{\infty x}, \quad v' = v - U_{\infty y}, \quad w' = w - U_{\infty z} \quad (2.3)$$

и обозначения  $n = U_{\infty y}/U_{\infty x}$ ,  $l = U_{\infty z}/U_{\infty x}$ ,  $\text{Re} = U_{\infty x} R/\nu$ , перепишем уравнения (2.1) покомпонентно

$$\text{Re} \frac{\partial u'}{\partial X} + n \text{Re} \frac{\partial u'}{\partial Y} + l \text{Re} \frac{\partial u'}{\partial Z} = -\frac{R}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial^2 u'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial Z^2}, \quad (2.4)$$

$$\text{Re} \frac{\partial v'}{\partial X} + n \text{Re} \frac{\partial v'}{\partial Y} + l \text{Re} \frac{\partial v'}{\partial Z} = -\frac{R}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\partial^2 v'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial Z^2}, \quad (2.5)$$

$$\text{Re} \frac{\partial w'}{\partial X} + n \text{Re} \frac{\partial w'}{\partial Y} + l \text{Re} \frac{\partial w'}{\partial Z} = -\frac{R}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{\partial^2 w'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial Z^2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial X} + \frac{\partial v'}{\partial Y} + \frac{\partial w'}{\partial Z} = 0. \quad (2.7)$$

Граничные условия к уравнениям (2.4)–(2.7), следующие из условий (2.2), записываются как

$$u' = -U_{\infty x}, \quad v' = -U_{\infty y}, \quad w' = -U_{\infty z}, \quad \eta = 1; \quad u' \rightarrow 0, \quad v' \rightarrow 0, \quad w' \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

### § 3. Аналитические решения уравнений Осеена обтекания дендрита наклонным потоком жидкости

Для решения уравнений (2.4)–(2.7) воспользуемся классической теорией Осеена [6–8]. Введем новые функции  $M$  и  $N$ , связанные с  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  и  $p$ , следующим образом:

$$u' = \frac{\partial M}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial N}{\partial X} - N, \quad v' = \frac{\partial M}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial N}{\partial Y} - nN, \quad (3.1)$$

$$w' = \frac{\partial M}{\partial Z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial N}{\partial Z} - lN, \quad p = -\frac{\rho\nu}{R} \text{Re} \left( \frac{\partial M}{\partial X} + n \frac{\partial M}{\partial Y} + l \frac{\partial M}{\partial Z} \right). \quad (3.2)$$

В случае двумерного обтекания  $v' = 0$  и  $M$  не зависит от  $Y$ .

Подстановка соотношений (3.1) и (3.2) в уравнения (2.4)–(2.7) показывает, что эти уравнения выполняются, только если  $M$  и  $N$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 M}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial Z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial Z^2} - \text{Re} \left( \frac{\partial N}{\partial X} + n \frac{\partial N}{\partial Y} + l \frac{\partial N}{\partial Z} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Отыскивая решение задачи вблизи вершины дендрита ( $\xi$  мала) переписываем уравнения (3.3) в координатах параболического цилиндра и параболоида вращения с помощью выражений (1.4), (1.8), (1.9) с учетом зависимостей  $M$  и  $N$  лишь от координаты  $\eta$ . В результате имеем уравнения

$$\frac{d^2 M}{d\eta^2} = 0, \quad \frac{d^2 N}{d\eta^2} + \text{Re} \eta \frac{dN}{d\eta} = 0 \quad (3.4)$$

для параболического цилиндра и

$$\frac{d^2 M}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dM}{d\eta} = 0, \quad \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dN}{d\eta} \right) + \text{Re} \eta \frac{dN}{d\eta} = 0 \quad (3.5)$$

для параболоида вращения.

Решения уравнений (3.4) и (3.5) имеют вид

$$M(\eta) = A_1 \eta + B_1, \quad N(\eta) = C_1 \int_1^\eta \exp \left( -\frac{\text{Re} t^2}{2} \right) dt + C_2$$

для параболического цилиндра и

$$M(\eta) = A_2 \ln \eta + B_2, \quad N(\eta) = D_1 \int_1^\eta \exp \left( -\frac{\text{Re} t^2}{2} \right) \frac{dt}{t} + D_2$$

для параболоида вращения.

Далее подставляем найденные решения в соотношения (3.1) и (3.2) с учетом формул (1.4), (1.8), (1.9) и находим произвольные постоянные из условий (2.8)

$$A_1 = A_2 = -\frac{C_1 \exp(-\text{Re}/2)}{\text{Re}}, \quad C_1^{-1} = -C_2^{-1} \int_1^\infty \exp \left( -\frac{\text{Re} t^2}{2} \right) dt, \quad (3.6)$$

$$D_1^{-1} = -D_2^{-1} \int_1^\infty \exp \left( -\frac{\text{Re} t^2}{2} \right) \frac{dt}{t}, \quad C_2 = D_2 = U_{\infty x}. \quad (3.7)$$

Постоянные  $B_1$  и  $B_2$  не входят в компоненты скорости (3.1) и (3.2), поскольку  $u'$ ,  $v'$  и  $w'$  зависят лишь от производных функции  $M$ .

Подставляя теперь (3.1) и (3.2) в (2.3) с учетом (3.6) и (3.7), получаем

$$u = U_{\infty x} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2}\eta)}{\operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2})} - \frac{\eta [\exp(-\operatorname{Re}/2) - \exp(-\operatorname{Re}\eta^2/2)]}{\sqrt{\pi \operatorname{Re}/2} (\xi^2 + \eta^2) \operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2})} \right\}, \quad (3.8)$$

$$w = U_{\infty x} \left\{ l \left[ 1 - \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2}\eta)}{\operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2})} \right] + \frac{\xi [\exp(-\operatorname{Re}/2) - \exp(-\operatorname{Re}\eta^2/2)]}{\sqrt{\pi \operatorname{Re}/2} (\xi^2 + \eta^2) \operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2})} \right\} \quad (3.9)$$

для параболического цилиндра и

$$u = U_{\infty x} \left\{ 1 - \frac{E_1(\operatorname{Re}\eta^2/2)}{E_1(\operatorname{Re}/2)} - \frac{2 [\exp(-\operatorname{Re}/2) - \exp(-\operatorname{Re}\eta^2/2)]}{\operatorname{Re}(\xi^2 + \eta^2) E_1(\operatorname{Re}/2)} \right\}, \quad (3.10)$$

$$v = U_{\infty x} \left\{ n \left[ 1 - \frac{E_1(\operatorname{Re}\eta^2/2)}{E_1(\operatorname{Re}/2)} \right] + \frac{2\xi \sin \varphi [\exp(-\operatorname{Re}/2) - \exp(-\operatorname{Re}\eta^2/2)]}{\operatorname{Re}(\xi^2 + \eta^2) \eta E_1(\operatorname{Re}/2)} \right\}, \quad (3.11)$$

$$w = U_{\infty x} \left\{ l \left[ 1 - \frac{E_1(\operatorname{Re}\eta^2/2)}{E_1(\operatorname{Re}/2)} \right] + \frac{2\xi \cos \varphi [\exp(-\operatorname{Re}/2) - \exp(-\operatorname{Re}\eta^2/2)]}{\operatorname{Re}(\xi^2 + \eta^2) \eta E_1(\operatorname{Re}/2)} \right\} \quad (3.12)$$

для параболоида вращения. При записи компонент скорости (3.8)–(3.12) было учтено, что

$$\operatorname{erfc}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_q^\infty \exp(-t^2) dt, \quad E_1(q) = \int_q^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt.$$

В предельном случае осесимметричного течения, когда  $n = l = 0$ , решения (3.8)–(3.12) переходят в формулы (68) и (69) из работы [5].

При решении различных задач о росте параболических/параболоидальных дендритов часто бывает удобно использовать компоненты скорости, записанные в специальных криволинейных координатах. Поэтому учитывая, что  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z = u_\xi\mathbf{e}_\xi + u_\eta\mathbf{e}_\eta + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ , а также выражения (1.2) и (1.6), имеем

$$u_\xi = \frac{U_{\infty x}(\xi + l\eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left( 1 - \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2}\eta)}{\operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2})} \right), \quad (3.13)$$

$$u_\eta = \frac{U_{\infty x}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left\{ (l\xi - \eta) \left[ 1 - \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2}\eta)}{\operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2})} \right] + \frac{\exp(-\operatorname{Re}/2) - \exp(-\operatorname{Re}\eta^2/2)}{\sqrt{\pi \operatorname{Re}/2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{Re}/2})} \right\} \quad (3.14)$$

для параболического цилиндра и

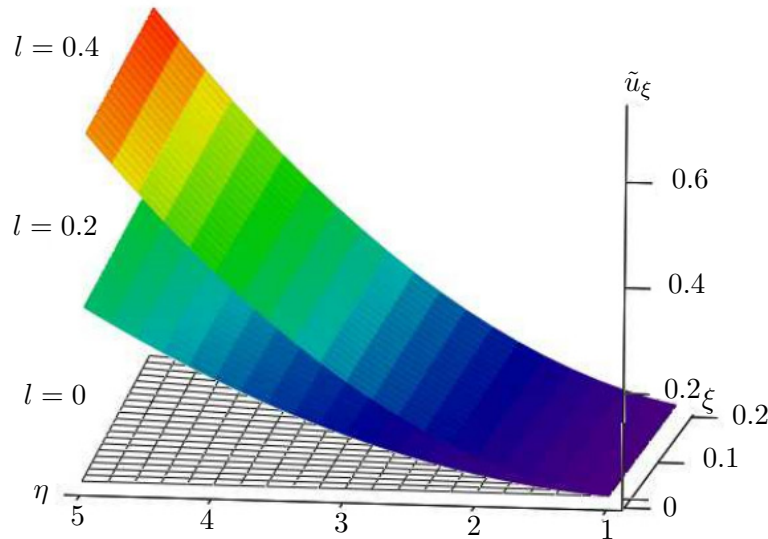
$$u_\xi = \frac{U_{\infty x}(\xi + n\eta \sin \varphi + l\eta \cos \varphi)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left( 1 - \frac{E_1(\operatorname{Re}\eta^2/2)}{E_1(\operatorname{Re}/2)} \right), \quad (3.15)$$

$$u_\eta = \frac{U_{\infty x}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left[ (n\xi \sin \varphi + l\xi \cos \varphi - \eta) \left( 1 - \frac{E_1(\operatorname{Re}\eta^2/2)}{E_1(\operatorname{Re}/2)} \right) + \frac{2 [\exp(-\operatorname{Re}/2) - \exp(-\operatorname{Re}\eta^2/2)]}{\operatorname{Re} \eta E_1(\operatorname{Re}/2)} \right], \quad (3.16)$$

$$u_\varphi = U_{\infty x} (l \sin \varphi - n \cos \varphi) \left( 1 - \frac{E_1(\operatorname{Re}\eta^2/2)}{E_1(\operatorname{Re}/2)} \right) \quad (3.17)$$

для параболоида вращения. Решения (3.13)–(3.17) переходят в формулы (70)–(75) из статьи [5] при  $l = n = 0$ , то есть в случае симметричного натекания жидкости на дендрит вдоль оси  $X$ .

На рисунке 2 показано влияние коэффициента наклона течения  $l = U_{\infty z}/U_{\infty x}$  на компоненту скорости  $\tilde{u}_\xi = u_\xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2}/U_{\infty x}$ , определенную по формуле (3.13). Легко заметить, что в окрестности вершины дендрита скорость наклонного потока может отличаться в несколько раз от скорости прямого потока, когда  $l = 0$ .



**Рис. 2.** Зависимость приведенной компоненты скорости  $\tilde{u}_\xi = u_\xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2}/U_{\infty x}$  от пространственных координат при различных коэффициентах  $l$  наклона течения для двумерного случая,  $Re = 0.01$ .

#### § 4. Аналитические решения гидродинамических уравнений Осеена в системе координат растущего с постоянной скоростью дендрита

При описании процессов дендритного роста часто возникает необходимость перехода в движущуюся с постоянной скоростью  $V$  систему координат, связанную с растущим дендритом [9–12]. Переходя в подвижную систему координат, связанную с дендритом, меняя для удобства направление оси  $x$  на противоположное и вводя криволинейные координаты, согласно работам [9–12], для двумерной (2D) и трехмерной (3D) геометрий

$$2D: \quad x = \frac{R}{2}(\eta - \xi), \quad z = R\sqrt{\xi\eta},$$

$$3D: \quad x = \frac{R}{2}(\eta - \xi), \quad y = R\sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = R\sqrt{\xi\eta} \cos \varphi,$$

получаем следующие решения:

$$u_\xi = \frac{V\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi + \eta}} + \frac{U_{\infty x}(\sqrt{\xi} + l\sqrt{\eta})}{\sqrt{\xi + \eta}} \left( 1 - \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{Re\eta/2})}{\operatorname{erfc}(\sqrt{Re/2})} \right), \quad (4.1)$$

$$u_\eta = -\frac{V\sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi + \eta}} + \frac{U_{\infty x}}{\sqrt{\xi + \eta}} \left\{ (l\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}) \left[ 1 - \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{Re\eta/2})}{\operatorname{erfc}(\sqrt{Re/2})} \right] + \frac{\exp(-Re/2) - \exp(-Re\eta/2)}{\sqrt{\pi Re/2} \operatorname{erfc}(\sqrt{Re/2})} \right\} \quad (4.2)$$

для параболического цилиндра и

$$u_\xi = \frac{V\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi + \eta}} + \frac{U_{\infty x}(\sqrt{\xi} + n\sqrt{\eta} \sin \varphi + l\sqrt{\eta} \cos \varphi)}{\sqrt{\xi + \eta}} \left( 1 - \frac{E_1(Re\eta/2)}{E_1(Re/2)} \right), \quad (4.3)$$

$$u_{\eta} = -\frac{V\sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi+\eta}} + \frac{U_{\infty x}}{\sqrt{\xi+\eta}} \left[ \left( n\sqrt{\xi}\sin\varphi + l\sqrt{\xi}\cos\varphi - \sqrt{\eta} \right) \left( 1 - \frac{E_1(\operatorname{Re}\eta/2)}{E_1(\operatorname{Re}/2)} \right) + \frac{2[\exp(-\operatorname{Re}/2) - \exp(-\operatorname{Re}\eta/2)]}{\operatorname{Re}\sqrt{\eta}E_1(\operatorname{Re}/2)} \right], \quad (4.4)$$

$$u_{\varphi} = U_{\infty x} (l\sin\varphi - n\cos\varphi) \left( 1 - \frac{E_1(\operatorname{Re}\eta/2)}{E_1(\operatorname{Re}/2)} \right) \quad (4.5)$$

для параболоида вращения. Выражения (4.1)–(4.5) при  $l = n = 0$  переходят в соответствующие соотношения для компонент скорости жидкости при осесимметричном обтекании дендрита [9, 11].

### Заключение

В настоящей работе построено обобщение гидродинамической теории [5] на случай обтекания кристалла параболической/параболоидальной формы наклонным потоком вязкой жидкости на основе уравнений Осеена вблизи вершины дендрита. Обобщенное решение переписано в системе координат растущего с постоянной скоростью дендритного кристалла. Поскольку конвективные потоки существенным образом изменяют локальные градиенты температуры и концентрации примеси, наклонное течение будет приводить к отклонению температурных и концентрационных решений в жидкости от классических решений Иванцова [11] с осесимметричным обтеканием жидкостью растущего дендрита. Это, в свою очередь, будет приводить к новому модифицированному отборному соотношению для устойчивой скорости роста вершины дендрита. Кроме этого, несимметричность гидродинамического, теплового и концентрационного полей относительно оси дендрита (ось  $X$  на рисунках 1,  $a$  и 1,  $b$ ) будет приводить к несимметричному росту вторичных ветвей дендрита (см. также вычислительные эксперименты [13, 14]). Изучение этих вопросов представляет важную и актуальную задачу для будущих исследований.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bouissou P., Perrin B., Tabeling P. Influence of an external flow on dendritic crystal growth // *Physical Review A*. 1989. Vol. 40. Issue 1. P. 509–510. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.509](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.509)
2. Binder S., Galenko P.K., Herlach D.M. The effect of fluid flow on the solidification of  $\text{Ni}_2\text{B}$  from the undercooled melt // *Journal of Applied Physics*. 2014. Vol. 115. Issue 5. 053511. DOI: [10.1063/1.4864151](https://doi.org/10.1063/1.4864151)
3. Gao J., Han M., Kao A., Pericleous K., Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendritic growth velocities in an undercooled melt of pure nickel under static magnetic fields: A test of theory with convection // *Acta Materialia*. 2016. Vol. 103. P. 184–191. DOI: [10.1016/j.actamat.2015.10.014](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.10.014)
4. Oseen C.W. Über die Stokessche formel und über eine verwandte aufgabe in der hydrodynamik // *Ark. Mat. Astron. Fys.* 1910. Vol. 6. P. 1–20.
5. Dash S.K., Gill W.N. Forced convection heat and momentum transfer to dendritic structures (parabolic cylinders and paraboloids of revolution) // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1984. Vol. 27. Issue 8. P. 1345–1356. DOI: [10.1016/0017-9310\(84\)90062-0](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90062-0)
6. Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 929 с.
7. Розе Н.В., Кибель И.А., Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Л.–М.: Гостехиздат, 1937. 507 с.
8. Buyevich Yu.A., Alexandrov D.V., Zakharov S.V. Hydrodynamics. Examples and problems. New York: Begell House, 2001. 331 p.
9. Bouissou Ph., Pelcé P. Effect of a forced flow on dendritic growth // *Physical Review A*. 1989. Vol. 40. Issue 11. P. 6673–6680. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.6673](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.6673)
10. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Péclet numbers with convection // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87. Issue 6. 062403. 5 p. DOI: [10.1103/PhysRevE.87.062403](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062403)
11. Александров Д.В., Галенко П.К. Дендритный рост с вынужденной конвекцией: методы анализа и экспериментальные тесты // *Успехи физических наук*. 2014. Т. 184. Вып. 8. С. 833–850. DOI: [10.3367/UFNr.0184.201408b.0833](https://doi.org/10.3367/UFNr.0184.201408b.0833)
12. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Thermo-solutal and kinetic regimes of an anisotropic dendrite growing under forced convective flow // *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2015. Vol. 17. P. 19149–19161. DOI: [10.1039/C5CP03018H](https://doi.org/10.1039/C5CP03018H)



13. Kao A., Pericleous K. A numerical model coupling thermoelectricity, magnetohydrodynamics and dendritic growth // *Journal of Algorithms & Computational Technology* 2012. Vol. 6. No. 1. P. 173–201. DOI: [10.1260/1748-3018.6.1.173](https://doi.org/10.1260/1748-3018.6.1.173)
14. Kao A., Shevchenko N., Roshchupinka O., Eckert S., Pericleous K. The effects of natural, forced and thermoelectric magnetohydrodynamic convection during the solidification of thin sample alloys // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2015. Vol. 84. 012018. 8 p. DOI: [10.1088/1757-899X/84/1/012018](https://doi.org/10.1088/1757-899X/84/1/012018)

Поступила в редакцию 23.05.2016

Александров Дмитрий Валерьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики, лаборатория многомасштабного математического моделирования, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: [dmitri.alexandrov@urfu.ru](mailto:dmitri.alexandrov@urfu.ru)

Галенко Пётр Константинович, д. ф.-м. н., профессор, физико-астрономический факультет, Университет Фридриха Шиллера, 07743, Германия, г. Йена, Лёбдигерграбен штрассе, 32.

E-mail: [Peter.Galenko@uni-jena.de](mailto:Peter.Galenko@uni-jena.de)

**D. V. Alexandrov, P. K. Galenko**

**Analytical solution of the problem on inclined viscous flow around a parabolic dendrite within the framework of Oseen's approximation**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 379–387 (in Russian).

**Keywords:** dendrites, convection, viscous flow, Oseen's approximation.

MSC2010: 76D07, 76M45

DOI: [10.20537/vm160307](https://doi.org/10.20537/vm160307)

A mathematical model of inclined viscous flow around a dendrite in Oseen's hydrodynamic approximation is formulated. The analytical solution of the problem on inclined viscous flow around a parabolic dendrite in two- and three-dimensional cases is constructed. The components of fluid velocity in the vicinity of the dendritic tip in 2D and 3D flow geometries are determined in the laboratory coordinate system by means of the curvilinear coordinates of parabolic cylinder and paraboloid of revolution. The analytical solutions of Oseen's hydrodynamic equations are rewritten in the coordinate system connected to the dendrite growing with a constant velocity. The obtained solution transforms to the previously known one in the limiting case of zero angle between the fluid velocity direction far from the dendrite and its axis. A scaled component of fluid velocity as a function of parabolic coordinates at different slope coefficients of flow is illustrated.

## REFERENCES

1. Bouissou P., Perrin B., Tabeling P. Influence of an external flow on dendritic crystal growth, *Physical Review A*, 1989, vol. 40, issue 1, pp. 509–510. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.509](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.509)
2. Binder S., Galenko P.K., Herlach D.M. The effect of fluid flow on the solidification of Ni<sub>2</sub>B from the undercooled melt, *Journal of Applied Physics*, 2014, vol. 115, issue 5, 053511. DOI: [10.1063/1.4864151](https://doi.org/10.1063/1.4864151)
3. Gao J., Han M., Kao A., Pericleous K., Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendritic growth velocities in an undercooled melt of pure nickel under static magnetic fields: A test of theory with convection, *Acta Materialia*, 2016, vol. 103, pp. 184–191. DOI: [10.1016/j.actamat.2015.10.014](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.10.014)
4. Oseen C.W. Über die Stokessche formel und über eine verwandte aufgabe in der hydrodynamik, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1910, vol. 6, pp. 1–20.
5. Dash S.K., Gill W.N. Forced convection heat and momentum transfer to dendritic structures (parabolic cylinders and paraboloids of revolution), *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1984, vol. 27, issue 8, pp. 1345–1356. DOI: [10.1016/0017-9310\(84\)90062-0](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90062-0)
6. Lamb H. (Sir) *Hydrodynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1895, 636 p.

7. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Theoretical hydromechanics*, New York: Interscience, 1964, 577 p.
8. Buyevich Yu.A., Alexandrov D.V., Zakharov S.V. *Hydrodynamics. Examples and problems*, New York: Begell House, 2001, 331 p.
9. Bouissou Ph., Pelcé P. Effect of a forced flow on dendritic growth, *Physical Review A*, 1989, vol. 40, issue 11, pp. 6673–6680. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.6673](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.6673)
10. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Péclet numbers with convection, *Physical Review E*, 2013, vol. 87, issue 6, 062403, 5 p.  
DOI: [10.1103/PhysRevE.87.062403](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062403)
11. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendrite growth under forced convection: analysis methods and experimental tests, *Physics-Uspekhi*, 2014, vol. 57, issue 8, pp. 771–786.  
DOI: [10.3367/UFNe.0184.201408b.0833](https://doi.org/10.3367/UFNe.0184.201408b.0833)
12. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Thermo-solutal and kinetic regimes of an anisotropic dendrite growing under forced convective flow, *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2015, vol. 17, pp. 19149–19161.  
DOI: [10.1039/C5CP03018H](https://doi.org/10.1039/C5CP03018H)
13. Kao A., Pericleous K. A numerical model coupling thermoelectricity, magnetohydrodynamics and dendritic growth, *Journal of Algorithms & Computational Technology*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 173–201.  
DOI: [10.1260/1748-3018.6.1.173](https://doi.org/10.1260/1748-3018.6.1.173)
14. Kao A., Shevchenko N., Roshchupinka O., Eckert S., Pericleous K. The effects of natural, forced and thermoelectric magnetohydrodynamic convection during the solidification of thin sample alloys, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2015, vol. 84, 012018, 8 p.  
DOI: [10.1088/1757-899X/84/1/012018](https://doi.org/10.1088/1757-899X/84/1/012018)

Received 23.05.2016

Alexandrov Dmitri Valer'evich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics, Laboratory of Multi-Scale Mathematical Modeling, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: [dmitri.alexandrov@urfu.ru](mailto:dmitri.alexandrov@urfu.ru)

Galenko Peter Konstantinovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Physics and Astronomy, Friedrich Schiller University, Jena, D-07743, Germany.

E-mail: [Peter.Galenko@uni-jena.de](mailto:Peter.Galenko@uni-jena.de)